Électromagnétisme

TD 7
Mouvement dans un champ magnétique

Introduction : Un courant électrique crée un champ magnétique. De façon équivalente, une charge q se déplaçant dans un champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}}$ subit une force magnétique (force de Laplace), donnée par :

$$\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} = q\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} \tag{1}$$

Il est clair que le champ magnétique est un phénomène lié exclusivement au *mouvement* : il est créé par des charges en mouvement et « senti » uniquement par des charges en mouvement (si $v = 0$ il n'y a pas de force magnétique !).

En présence d'un champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$, la force totale (électrique et magnétique) exercée sur une particule chargée est donnée par (force de Lorenz) :

$$\vec{\boldsymbol{F}} = \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{e}} + \vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}} = q\vec{\boldsymbol{E}} + q\vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}} = q(\vec{\boldsymbol{E}} + \vec{\boldsymbol{v}} \wedge \vec{\boldsymbol{B}}) \tag{2}$$

Il faut noter que la force magnétique $\vec{\boldsymbol{F}}_{\boldsymbol{m}}$ est toujours perpendiculaire à la vitesse $\vec{\boldsymbol{v}}$: le travail du champ magnétique à tout instant est nul et, par conséquent, il n'a aucun effet sur l'énergie cinétique de la particule. Le module de la vitesse v restera donc constant sous l'influence d'un champ magnétique, même si le vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}$ change de direction. Au contraire, un champ électrique peut accélérer ou décélérer une particule chargée.

Notions : champ magnétique ; force de Laplace ; force de Lorenz ; mouvement dans un champ magnétique.

7.1 Mouvement dans un champ magnétique

Une particule chargée ($q > 0$), de masse m, se déplace à une vitesse $\vec{\boldsymbol{v}} = v\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}}$ dans un champ magnétique $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$.

a. Examiner la force magnétique exercée sur la particule et montrer, de façon qualitative, que celle-ci décrit une trajectoire circulaire. Quelle est l'influence du signe de la charge ?

b. Calculer le rayon R et la fréquence angulaire ω.

c. Examiner le cas où $\vec{\boldsymbol{v}} = v_\perp\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{z}} + v_\parallel\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$. Comment la composante $v_\parallel$ (parallèle au champ magnétique) influence le mouvement ?

d. Proposer un dispositif pour séparer des particules chargées en fonction de leur masse.

e. Reprendre les calculs de façon plus rigoureuse : commencer par l'équation du mouvement $\vec{\boldsymbol{F}} = m\vec{\boldsymbol{a}}$ et établir un système d'équations différentielles décrivant l'évolution dans le temps des trois composantes du vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$. Résoudre ces équations et appliquer les conditions initiales (à $t = 0$, la vitesse est donnée par la question c.). Donner l'expression du vecteur $\vec{\boldsymbol{v}}(t)$.

f. Donner l'expression du vecteur de position de la particule en fonction du temps, $\vec{r}(t) = x(t)\hat{e}_x + y(t)\hat{e}_y + z(t)\hat{e}_z$.

g. Montrer que la particule décrit un cercle sur le plan yz (on peut choisir la position initiale, $\vec{r}(t=0)$, de façon arbitraire).

Résultat:

b. $R = mv/qB$, $\omega = qB/m$.

e. $v_x(t) = v_\parallel$, $v_y(t) = v_\perp \sin(\frac{qB}{m}t)$, $v_z(t) = v_\perp \cos(\frac{qB}{m}t)$

f. $x(t) = v_\parallel t + A_x$, $y(t) = -\frac{m}{qB}v_\perp \cos(\frac{qB}{m}t) + A_y$, $z(t) = +\frac{m}{qB}v_\perp \sin(\frac{qB}{m}t) + A_z$

g. *On choisit* $\vec{r}(t=0) = (0, -mv_\perp/qB, 0)$, *alors* $A_x = A_y = A_z = 0$,
$y(t)^2 + z(t)^2 = (\frac{mv_\perp}{qB})^2 = R^2$
la particule décrit alors un cercle de rayon $R = mv_\perp/qB$ *sur le plan* yz*, tout en se déplaçant selon* x *avec une vitesse* $v_\parallel$ *; il s'agit donc d'un mouvement hélicoïdal.*

7.2 Mouvement dans un champ électrique et magnétique

On revient à l'exercice 7.1. On considère maintenant qu'un champ électrique $\vec{E} = E\hat{e}_z$ et un champ magnétique $\vec{B} = B\hat{e}_x$ co-existent dans tout l'espace. Une particule chargée ($q > 0$) est laissée libre à l'origine des axes, sans vitesse initiale.

a. Décrire, de façon qualitative, la trajectoire suivie.

b. À partir de l'équation du mouvement, $\vec{F} = m\vec{a}$, établir un système d'équations différentielles décrivant l'évolution dans le temps des trois composantes du vecteur $\vec{v}$. Résoudre ces équations et appliquer les conditions initiales. Donner l'expression du vecteur $\vec{v}$ en fonction du temps.

c. Donner l'expression du vecteur de position $\vec{r}(t)$ de la particule en fonction du temps.

d. Montrer qu'il s'agit d'un mouvement périodique et déterminer la fréquence angulaire ω.

e. Montrer que $y(t)$ et $z(t)$ sont liés par l'expression :
$(y - R\omega t)^2 + (z - R)^2 = R^2$
où $R = E/\omega B$. Que représente cette équation ?

f. Calculer l'énergie cinétique E_c de la particule en fonction du temps. Tracer $E_c(t)$ et expliquer comment cette évolution confirme le raisonnement qualitatif de la question a.

g. Calculer le potentiel électrostatique V.

h. Montrer que l'énergie totale de la particule (cinétique plus électrostatique) reste constante pendant le mouvement.

Résultat:

b. $v_x(t) = 0$, $v_y(t) = -\frac{E}{B}\cos(\frac{qB}{m}t) + \frac{E}{B}$, $v_y(t) = \frac{E}{B}\sin(\frac{qB}{m}t)$

c. $x(t) = 0$, $y(t) = -\frac{m}{qB}\frac{E}{B}\sin(\frac{qB}{m}t) + \frac{E}{B}t$, $z(t) = \frac{m}{qB}\frac{E}{B} - \frac{m}{qB}\frac{E}{B}\cos(\frac{qB}{m}t)$

d. $\omega = \frac{qB}{m}$

f. $E_c(t) = m \left(\frac{E}{B}\right)^2 [1 - \cos(\omega t)]$

g. $V(z) = -Ez + C$ *(où C est le potentiel à $z = 0$)*

h. $E_c + qV = qC = \mathcal{U}_e(t = 0)\ ,\ \forall t$

7.3 Effet Hall

On considère un courant de densité $\vec{\boldsymbol{J}} = J\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{y}}$ à l'intérieur d'un conducteur de section rectangulaire (largeur L selon x, hauteur l selon z), en présence d'un champ magnétique uniforme $\vec{\boldsymbol{B}} = B\hat{\boldsymbol{e}}_{\boldsymbol{x}}$.

a. Étudier le mouvement des porteurs de charges sous l'influence du champ magnétique.

b. À l'équilibre, la force électrique provoquée par l'accumulation des porteurs compensera la force magnétique. Trouver le champ électrique $\vec{\boldsymbol{E}}$.

c. En déduire l'expression de la différence de potentiel V_H due à ce champ électrique en fonction de paramètres faciles à mesurer en électronique.

d. Examiner le cas où la charge des porteurs serait de signe opposée par rapport à celle examinée précédemment.

Résultat:

b. $E = vB$, *où v est la vitesse des porteurs.*

c. $V_H = BI/(Lnq)$, *où n est la densité volumique des porteurs de charge q.*

d. *Même force (amplitude et direction) sur les porteurs ! La polarité s'inverse.*